ΒΑΣΕΙΣ - ΥΠΟΒΑΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, λέμε ότι $\mathcal{B}$ βάση της $\mathcal{T}$ τοπολογίας $\Leftrightarrow \mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{T}$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ/ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ:

Έστω $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, τότε

- $\mathcal{B}$ βάση της $\mathcal{T} \Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{T})(\exists G \subseteq \mathcal{B}) : A = \bigcup G$
- $\mathcal{B}$ βάση της $\mathcal{T} \Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{T})(\forall x \in A)(\exists B \in \mathcal{B}) : x \in B \subseteq A$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- $(\Rightarrow)$: Προφανές από τον ορισμό της $\mathcal{B}_\varepsilon$

$(\Leftarrow)$: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{B}_\varepsilon \subseteq \mathcal{T}_\varepsilon \overset{\mathcal{T}\text{ τοπολ}}{=\!=} \mathcal{T}$

Έστω $A \in \mathcal{T} \overset{\text{Υπόθ.}}{\Longrightarrow} A \in \mathcal{B}_\varepsilon \Rightarrow \mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}_\varepsilon$ $\Big\} \Rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{B}_\varepsilon$

- $(\Rightarrow)$: Προφανές

$(\Leftarrow)$ Έστω $A \in \mathcal{T} \Rightarrow (\forall x \in A)(\exists B_x \in \mathcal{B}) : x \in B_x \subseteq A \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup\limits_{x \in A} B_x \subseteq A$ αλλά $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} B_x$

Άρα, $A = \bigcup\limits_{x \in A} B_x \in \mathcal{B}_\varepsilon$

Επομένως, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{B}_\varepsilon \subseteq \mathcal{T}_\varepsilon \overset{\mathcal{T}\text{ τοπολ}}{=\!=} \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{T}$

Άρα $\mathcal{B}$ βάση.

ΠΡΟΤΑΣΗ:

Έστω $(E, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{T}$

Τότε Αν $\mathcal{B}$ βάση και $\mathcal{B}^*$ θα αποτελεί βάση της $\mathcal{T}$

Απόδειξη

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T} \overset{\mathcal{B}\text{ βάση}}{=\!=} \mathcal{B}_\varepsilon \subseteq \mathcal{B}^*_\varepsilon \subseteq \mathcal{T}_\varepsilon = \mathcal{T}$, διότι τοπολογία

$\Rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{B}^*$ δηλ. $\mathcal{B}^*$ βάση της $\mathcal{T}$

Παρατήρηση: Για μια τοπολογία η βάση δεν είναι μοναδική!!!

ΛΗΜΜΑ: Εστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$. Τοτε
$B \in \mathcal{A}_\varepsilon \Leftrightarrow (B=\emptyset$ ή $[(\forall x \in B)(\exists A \in \mathcal{A}) : x \in A \subseteq B]$ (*)

Με την βοήθεια του λήμματος μπορούμε να δείξουμε την πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ:
Εστω $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$, τότε:
$\mathcal{B}$ είναι βάση για μια τοπολογία $\mathcal{T}$ του E ανν
$\cup \mathcal{B} = E$ και $[(\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B})\ x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow (\exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq B_1 \cap B_2)]$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$(\Rightarrow)$: Εστω $\mathcal{B}$ βάση μιας $\mathcal{T}$ τοπολογίας
Δηλαδή $\mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{T}$. Τότε $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \cup\mathcal{B} \subseteq \cup\mathcal{T} \overset{\text{ορ}}{=} E$
Από την άλλη $E \in \mathcal{T} = \mathcal{B}_\varepsilon \Rightarrow E = \cup C$, $C \subseteq \mathcal{B}$.
Αρα, $\cup C = E \subseteq \cup \mathcal{B}$. Επομένως, $\cup\mathcal{B} = E$.
Ας είναι τώρα B_1, B_2 εν $\mathcal{B}$ και $x \in B_1 \cap B_2$
Τότε B_1, B_2 ανήκουν και στη $\mathcal{B}_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{B}_\varepsilon \text{ τοπολ}} B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}_\varepsilon$
$\overset{\text{λήμμα}}{\Longrightarrow} (\exists B \in \mathcal{B}) : x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$

$(\Leftarrow)$: Εστω ότι ισχύει η (*).
Θδο $\mathcal{B}_\varepsilon$ τοπολογία
Εχουμε $\cup\mathcal{B} = E \xrightarrow{\cup\mathcal{B} \in \mathcal{B}_\varepsilon} E \in \mathcal{B}_\varepsilon$
G, H τυχαία στοιχεία της $\mathcal{B}_\varepsilon$
$x \in G \cap H \Rightarrow x \in G \wedge x \in H \xrightarrow[H \in \mathcal{B}_\varepsilon]{G \in \mathcal{B}_\varepsilon} (\exists \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ εν $\mathcal{B})\ x \in B_1 \subseteq G$
και $x \in B_2 \subseteq G$. Αρα, εξ υποθέσεως
$(\exists B \in \mathcal{B}_\varepsilon)\ x \in B \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq G \cap H$
Ετσι,
$(\forall x \in G \cap H)(\exists B \in \mathcal{B}_\varepsilon) : x \in B \subseteq G \cap H$
Αρα, $G \cap H \in \mathcal{B}_\varepsilon \Rightarrow \mathcal{B}_\varepsilon$ τοπολογία

ΠΡΟΤΑΣΗ: Εστω $\mathcal{B}_\varepsilon \subseteq \mathcal{P}(E)$, τότε
$\mathcal{B}_\varepsilon$ τοπολογία $\Longleftrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_\varepsilon$

Αποδειξη

$(\Leftarrow)$: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_\varepsilon \Rightarrow \mathcal{B}_\varepsilon \subseteq \mathcal{B}_{\varepsilon\varepsilon} = \mathcal{T}(\mathcal{B})$ $\Big\} \Rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_\varepsilon$
$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_\varepsilon \Rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{B}_\varepsilon) \overset{\mathcal{B}_\varepsilon \text{ τοπ}}{=} \mathcal{B}_\varepsilon$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(E)$

Λέμε ότι $\mathcal{L}$ υποβάση μίας τοπολογίας $\mathcal{T}$ του E
αν.ν $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_{\varepsilon\varepsilon}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Κάθε βάση τοπολογίας είναι και υποβάση αυτής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Το συμπέρασμα προκύπτει από την προηγούμενη πρόταση

($\not\Leftarrow$)

Έστω $\mathcal{T}$ διακριτή τοπολογία στο $\mathbb{R}$ και $\mathcal{B} = \{\{x,y\} \subseteq \mathbb{R} \;\; x \neq y\}$

όπου $\{x,y\} \cap \{x,z\} = \{x\}$, $x \neq y \neq z$ και $x \neq z$

Άρα, $\mathcal{B}_{\varepsilon\varepsilon} = \mathcal{T}$ διακριτή άρα η $\mathcal{B}$ υποβάση της $\mathcal{T}$
αλλά όχι βάση αυτής διότι δεν πληροί τον ορισμό

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙΟΧΩΝ:

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $(E, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και τυχόν $a \in E$

N περιοχή του $a \iff (\exists A \in \mathcal{T}): a \in A \subseteq N$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $S \in \mathcal{T} \iff \overbrace{S \text{ περιοχή κάθε σημείου του}}^{(*)}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

($\Rightarrow$) Έστω $a \in S$, όπου a τυχόν

Τότε $a \in \underset{\text{ανοικτό}}{S} \subseteq S \Rightarrow S$ περιοχή του a

($\Leftarrow$): Έστω x τυχόν στοιχείο του $S \xRightarrow{(*)} (\exists A_x \text{ ανοικτό})\; x \in A_x \subseteq S$

$\bigcup_{x \in S} A_x \subseteq S$

$x \in S \Rightarrow x \in A_x \Rightarrow x \in \bigcup_{x \in S} A_x$

$\Longrightarrow S = \bigcup_{x \in S} A_x \in \mathcal{T}$

Τον συμβολισμό που συναντήσαμε στο 1ο κεφάλαιο

$\mathcal{N}_a \equiv$ το σύνολο των ανοιχτών περιοχών του a
και καλείται σύστημα περιοχών του a

ΠΡΟΤΑΣΗ: Για κάθε σημείο $a \in E$ και για $M, N \subseteq (E, \mathcal{T})$, ισχύουν:

α) $N \in \mathcal{N}_a \Rightarrow a \in N$

β) $N \in \mathcal{N}_a$, $N \subseteq M \Rightarrow M \in \mathcal{N}_a$

γ) $N, M \in \mathcal{N}_a \Rightarrow N \cap M \in \mathcal{N}_a$

δ) $(\forall N \in \mathcal{N}_a)(\exists M \in \mathcal{N}_a)(\forall x \in M): N \in \mathcal{N}_x$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (του δ)

Εστω $N \in \mathcal{N}_a \overset{\text{ορ.}}{\Longrightarrow} (\exists M \in \mathcal{T})\ a \in M \subseteq N$

Εστω τυχον $x \in M \xrightarrow[\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}]{M \in \mathcal{T}}$ M περιοχή του x $\xrightarrow[(\beta)]{M \subseteq N}$ N περιοχή του x $\Rightarrow$

ΟΡΙΣΜΟΣ: $\mathcal{B}$ βάση του $\mathcal{N}_a \Leftrightarrow (\forall N \in \mathcal{N}_a)(\exists B \in \mathcal{B})\ B \subseteq N$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Εστω $\mathcal{B}$ βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$ ενός τ.χ $(E, \mathcal{T})$ και $a \in E$. Τότε η $\mathcal{B}_a = \{B \in \mathcal{B} : a \in B\}$ είναι βάση του $\mathcal{N}_a$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\mathcal{B}_a \subseteq \mathcal{N}_a$ Εστω N τυχον, $N \in \mathcal{N}_a$ Τότε $(\exists A \in \mathcal{T})$ ωστε $a \in A \subseteq N \xrightarrow{\mathcal{B}\text{ βαση της } \mathcal{T} = \mathcal{B}_E} A = \bigcup_{i \in I} A_i$, $A_i \in \mathcal{B} \xrightarrow{a \in A} a \in A_{i_0}, i_0 \in I$

Τότε $a \in A_{i_0} \cancel{\subseteq A} \subseteq N \Rightarrow$ Η $\mathcal{B}_a$ βάση του συστήματος περιοχών του $\mathcal{N}_a$

Σύγκλιση ακολουθιών σε τοπολογικούς χώρους:

ΟΡΙΣΜΟΣ: Εστω $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ακολουθία εν $(E, \mathcal{T})$ τ.χ $\ell \in E$ τότε $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\ell \Leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{N}_\ell)\ a_\nu \in U$ τελικά για όλα τα $\nu \in \mathbb{N}$. $(a_\nu \xrightarrow{\nu \in \mathbb{N}} \ell)$.

Πχ

Για τον τετριμμενο τοπολογικό χώρο $(E, \{\emptyset, E\})$ $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ εν E και ℓ τυχον σημειο στο E

$U \in \mathcal{N}_\ell \Rightarrow U = E$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το οριο της ακολουθιας σε εναν τοπολογικό χωρο δεν ορίζεται μοναδικα

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ τυχούσα ακολουθία εν $(E,\mathcal{T})$, $\ell\in E$
$\mathcal{B}$ βάση της $\mathcal{T}$ και $\mathcal{B}_\ell$ μια βάση του $\mathcal{N}_\ell$ ισχύουν:
- $a_\nu\to\ell \iff [(\forall B\in\mathcal{B})\ \ell\in B \Rightarrow a_\nu\in B$ τελικά $\forall\nu\in\mathbb{N}]$
- $a_\nu\to\ell \iff [(\forall U\in\mathcal{B}_\ell)\ a_\nu\in U$ τελικά $\forall\nu\in\mathbb{N}]$
- $a_\nu\to\ell \iff [(\forall V\in\mathcal{N}_\ell)\ a_\nu\in V$ τελικά $\forall\nu\in\mathbb{N}]$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Αφήνεται ως άσκηση)

(H-W) Άσκηση: Έστω $(E,\mathcal{T})$ τοπ. χώρος, $X\subseteq E$, $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν X με $a_\nu\to\ell$, τότε $\ell\in X$.

Άσκηση (1): Να εξεταστεί αν η συλλογή $\mathcal{B}=\{(a,b]: a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\}$ είναι βάση για μια τοπολογία στο $\mathbb{R}$. Εάν ναι, τι σχέση έχει αυτή η τοπολογία με την Ευκλείδεια;

ΛΥΣΗ

Ισχύει $\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}}(-\nu,\nu]=\mathbb{R}$

Άρα,

$$\bigcup\mathcal{B}=\mathbb{R}$$

Έστω $(a,b]$ και $(c,d]$ εν $\mathcal{B}$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ:

$a=c$ και $b\le d \Rightarrow (a,b]\cap(c,d]=(a,b]$

$a=c$ και $d\le b \Rightarrow (a,b]\cap(c,d]=(a,d]$

$a<c$ και $b\le d \Rightarrow (a,b]\cap(c,d]=(c,b]$

$a<c$ και $d\le b \Rightarrow (a,b]\cap(c,d]=(c,d]$

Άρα, αποτελεί βάση μιας τοπολογίας $\mathcal{T}$ του $\mathbb{R}$ αφού πληροί την πρόταση

$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(E)$ βάση για μια $\mathcal{T}$ του $E \iff [\bigcup\mathcal{B}=E$ και $(\forall B_1,B_2$ εν $\mathcal{B})\ x\in B_1\cap B_2 \Rightarrow (\exists B\in\mathcal{B})\ x\in B\subseteq B_1\cap B_2]$

$(a,b)=\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}}(a,b-\frac{1}{\nu}]$

$\mathcal{E}\ni(a,b)\in\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{E}\subset\mathcal{T}$ και μάλιστα όχι ίσα διότι αν $(0,1]$ ανοιχτό της $\mathcal{T}$ $(0,1]\notin\mathcal{E}$.
όπου $\mathcal{E}$ ευκλείδεια τοπολογία

Άσκηση (2): Έστω $\mathcal{E}$ η ευκλείδεια τοπολογία του $\mathbb{R}$ και $\mathcal{T}$ η συμπεπερασμένη τοπολογία στον $\mathbb{R}$

ΝΔΟ $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{E}$.

Λύση

$X \in \mathcal{T} \Rightarrow X^c = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ με $a_1 < a_2 < \dots < a_k$

Τότε $X = (-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_1, a_2) \cup \dots \cup (a_{k-1}, a_k) \cup (a_k, \infty) \in \mathcal{E}$.

Άσκηση (3): Έστω E άπειρο και $\mathcal{T}$ τοπολογία στο E όπου περιέχει όλα τα άπειρα υποσύνολα του E

ΝΔΟ $\mathcal{T}$ είναι η διακριτή

Λύση

Έστω E άπειρο $\xRightarrow{x \in E}$ $E - \{x\}$ άπειρο

Θεωρούμε σύνολο $\{a_1, \dots, a_k, \dots\} \subseteq E - \{x\}$ με $\{a_1, \dots, a_k, \dots\}$ αριθμήσιμο με $i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$

Και $X = \{x, a_1, a_3, a_5, \dots\}$, $Y = \{x, a_2, a_4, a_6, \dots\}$

Τότε $X \cap Y = \{x\} \in \mathcal{T}$. με $X \in \mathcal{T} \wedge Y \in \mathcal{T}$

Άρα, η $\mathcal{T}$ διακριτή